

Exercice1 :(6pts)

- 1) Démontrer les propositions suivantes.
 - a) $2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$
 - b) Pour tout entier naturel n , 9 divise $7^{3n} - 1$.
 - c) Pour tout entier naturel n , $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.
- 2) a) donner suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 2^n par 7.
 - b) En déduire que si n est pas multiple de 3 alors $2^{n+2} + 2^{n+1} + 1$ est divisible par 7.

Exercice2 :(7pts)

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

- b) Montrer, à l'aide une intégration par partie que

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

- 2) Soit $F(x) = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2} dt$; $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

- a) Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et calculer $F'(x)$.

- b) En déduire que $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

- c) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ puis $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx$.

- 3) Sur la feuille annexe ci-jointe, on a représenté dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative de f^{-1} (où f^{-1} est la fonction réciproque de f).

- a) Construire dans (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C_f) .

- b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et les droites

$$\text{d'équations } x = 0 \text{ et } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice3 :(7pts)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que $OA = 2 OC$ et

$(\widehat{OA, OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On pose $I = O * A$, $J = B * C$ et $L = I * J$. La perpendiculaire

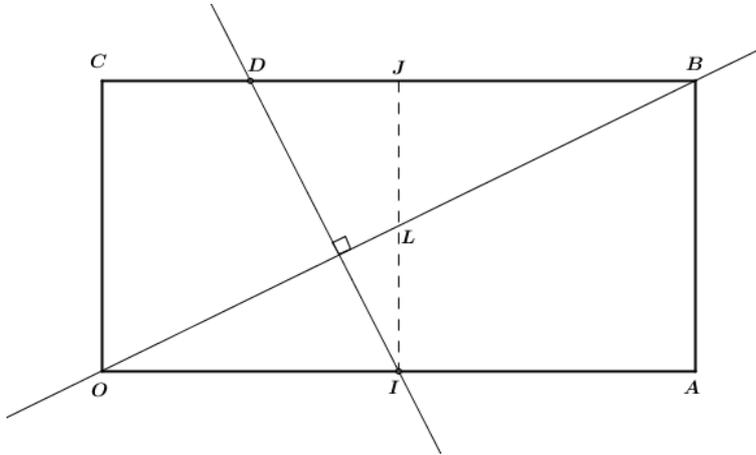
menée de I à la droite (OB) rencontre (BC) en un point D. Soit S la similitude directe telle que $S(O) = I$ et $S(A) = J$. (Voir feuille annexe)

- 1) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.
- 2) Déterminer $S(B)$ en utilisant les images des droites (OB) et (AB) par S.
- 3) Construire alors le point $E = S(C)$
- 4) Soit Ω le centre de S
 - a) Montrer que $S \circ S = h_{(\Omega, -\frac{1}{4})}$
 - b) Montrer que $S \circ S(O) = L$. En déduire que $\Omega \in (OL)$
 - c) Soit $H = I * D$. Montrer que $S \circ S(I) = H$. En déduire que $\Omega \in (IH)$ et construire Ω .
- 5) Soit σ la similitude indirecte de centre Ω et telle que $\sigma(I) = O$.
 - a) Déterminer le rapport de σ .
 - b) Construire l'axe Δ de σ .
 - c) Soit K le symétrique de Ω par rapport à I.
Montrer que Δ est la médiatrice du segment [OK].

Bon Travail

Feuille Annexe

Exercice 3



Exercice 2

